

Capitolul 1

Serii Fourier

1.1 Introducere

Sistemele liniare invariante în timp sunt de departe cele mai studiate și utilizate sisteme în prelucrarea semnalelor. Un sistem se numește liniar dacă răspunsul acestuia la suma a două semnale este identic cu suma răspunsurilor la fiecare semnal în parte. Un sistem se numește invariant în timp dacă răspunsul său la un semnal este același indiferent de momentul când este aplicat semnalul respectiv la intrarea sistemului. Din teoria sistemelor, se știe că funcțiile proprii ale sistemelor liniare invariante în timp (pe scurt, SLIT) sunt (co)sinusoidele. Altfel spus, dacă la intrarea unui SLIT aplicăm o cosinusoidă pură de frecvență ω_0 , atunci la ieșire vom avea tot o cosinusoidă pură ω_0 (bineînțeles, având altă amplitudine și fază). Acest fapt permite studierea comportamentului sistemului la un semnal de intrare oarecare, cu condiția să putem scrie semnalul respectiv ca o sumă (fie și infinită) de cosinusoide. Această scriere a semnalelor face obiectul primelor două capitole ale acestei prezentări.

În acest capitol vom prezenta cazul semnalelor periodice, arătând că acestea pot fi scrise ca o sumă numărabilă de componente sinusoidale ale căror amplitudini și faze pot fi calculate cu ușurință din semnalul respectiv. În capitolul următor, vom generaliza această descompunere la cazul semnalelor oarecare.

1.2 Forma trigonometrică

Fie $x(t)$ un semnal periodic, de perioada T :

$$x(t) = x(t + T) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

Atunci, se poate arăta că semnalul $x(t)$ se poate scrie sub forma unei sume numărabile de cosinusoide și sinusoidale, de frecvențe multipli ai frecvenței de bază a semnalului (numită frecvență fundamentală):

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.2)$$

Astfel, are loc relația:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(n\Omega t). \quad (1.3)$$

Coeficienții $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ și $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numesc coeficienții dezvoltării semnalului în serie Fourier trigonometrică.

Se poate arăta că funcțiile $\{\cos(n\Omega t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ și $\{\sin(n\Omega t)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ formează un set ortogonal de funcții. Dacă se definește produsul scalar al două funcții (reale) periodice de perioadă T precum:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_T f(t)g(t)dt, \quad (1.4)$$

unde \int_T reprezintă integrala pe o perioadă oarecare, atunci se poate arăta prin calcul direct că:

$$\langle \cos(m\Omega t), \cos(n\Omega t) \rangle = \begin{cases} T & \text{dacă } m = n = 0 \\ \frac{T}{2} & \text{dacă } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } m \neq n \end{cases} \quad (1.5a)$$

$$\langle \sin(m\Omega t), \sin(n\Omega t) \rangle = \begin{cases} T & \text{dacă } m = n = 0 \\ \frac{T}{2} & \text{dacă } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } m \neq n \end{cases} \quad (1.5b)$$

$$\langle \cos(m\Omega t), \sin(n\Omega t) \rangle = 0 \quad \forall m, n. \quad (1.5c)$$

Din ecuațiile (1.5), rezultă un mod simplu de calcul al coeficienții dezvoltării semnalului, prin produs scalar între acesta și funcția respectivă din baza de funcții. Astfel, dacă se calculează, spre exemplu:

$$\begin{aligned} \langle x(t), \cos(k\Omega t) \rangle &= \int_T x(t) \cos(k\Omega t) dt \\ &= \int_T \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(n\Omega t) \right) \cos(k\Omega t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \underbrace{\int_T \cos(n\Omega t) \cos(k\Omega t) dt}_{=0 \text{ pentru } n \neq k} + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \underbrace{\int_T \sin(n\Omega t) \cos(k\Omega t) dt}_{=0} \quad (1.6) \\ &= \begin{cases} \frac{T}{2} c_k & \text{dacă } k \neq 0 \\ T c_k & \text{dacă } k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Reluând demonstrația de mai sus și pentru valorile s_k , rezultă următoarele relații de calcul pentru coeficienții dezvoltării semnalului $x(t)$ în serie Fourier trigonometrică.

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \quad (1.7a)$$

$$c_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos(n\Omega t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.7b)$$

$$s_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin(n\Omega t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.7c)$$

Este evident că șirul de coeficienți $\{c_0, c_1, c_2, \dots, s_1, s_2, \dots\}$ constituie o altă reprezentare a semnalului $x(t)$, întrucât, conform cu (1.3), acesta poate fi reconstruit perfect pe baza coeficienților respectivi. Reprezentarea sub formă trigonometrică a seriei Fourier a unui semnal este, însă, destul de greu de interpretat, datorită prezenței a doi coeficienți (unul “sinusoidal” și celălalt “cosinusoidal”) ce caracterizează fiecare frecvență $n\Omega$. Forma armonică a descompunerii în serie Fourier, pe care o vom prezenta în paragraful următor este mai intuitivă, întrucât face să apară o singură componentă sinusoidală pentru fiecare frecvență prin compactarea componentei “cosinusoidale” cu cea “sinusoidală”.

1.3 Forma armonică

Să considerăm cantitățile A_n și φ_n reprezentând coordonatele polare ale perechii (c_n, s_n) . Cu alte cuvinte, pentru $n > 0$ avem relațiile:

$$A_n = \sqrt{c_n^2 + s_n^2} \quad (1.8a)$$

$$\varphi_n = -\arctan\left(\frac{s_n}{c_n}\right), \quad (1.8b)$$

respectiv

$$c_n = A_n \cos(\varphi_n) \quad (1.9a)$$

$$s_n = -A_n \sin(\varphi_n). \quad (1.9b)$$

în timp ce pentru $n = 0$ luăm:

$$A_0 = c_0 \quad (1.10a)$$

$$\varphi_0 = 0. \quad (1.10b)$$

Înlocuind relațiile (1.9) în descompunerea (1.3), obținem:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(\varphi_n) \cos(n\Omega t) - A_n \sin(\varphi_n) \sin(n\Omega t)), \quad (1.11)$$

de unde, prin restrângere, obținem forma finală a descompunerii semnalului $x(t)$ în serie Fourier armonică:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \quad (1.12)$$

Forma (1.12) este mai ușor de interpretat, întrucât conține amplitudinile A_n și fazele φ_n cosinusoidelor de frecvențe $n\Omega$ ce intervin în descompunerea semnalului nostru periodic. Șirul de coeficienți $\{A_0, A_1, A_2, \dots\}$ reprezintă *spectrul de amplitudini* al semnalului $x(t)$, iar șirul $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ *spectrul de faze* al acestuia.

1.4 Forma complexă

Forma complexă este cea mai generală formă a descompunerii unui semnal periodic în serie Fourier. Se pornește de la identitatea

$$\cos(x) = \frac{\exp(jx) + \exp(-jx)}{2}, \quad (1.13)$$

care se înlocuiește în relația (1.12), rezultând:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \exp(j\varphi_n) \exp(jn\Omega t) + A_n \exp(-j\varphi_n) \exp(-jn\Omega t)) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \exp(j\varphi_n) \exp(jn\Omega t) + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{A_{-n}}{2} \exp(-j\varphi_{-n}) \exp(jn\Omega t). \end{aligned} \quad (1.14)$$

În relația de mai sus, am folosit faptul că $\varphi_0 = 0$. În continuare, introducem cantitatea $A_{nc} \in \mathbb{C}$ cu $n \in \mathbb{Z}$ definită astfel:

$$A_{nc} = \begin{cases} A_0 & \text{pentru } n = 0 \\ \frac{1}{2} A_n \exp(j\varphi_n) & \text{pentru } n > 0 \\ \frac{1}{2} A_{-n} \exp(-j\varphi_{-n}) & \text{pentru } n < 0 \end{cases}. \quad (1.15)$$

Cu notația de mai sus, dezvoltarea (1.14) devine:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} \exp(jn\Omega t), \quad (1.16)$$

relație ce reprezintă dezvoltarea semnalului periodic $x(t)$ în serie Fourier armonică. Unul din avantajele acestei reprezentări constă în modalitatea directă și mai ales unitară de calcul al coeficienților dezvoltării A_{nc} . Astfel, pentru $n > 0$ avem:

$$\begin{aligned} A_{nc} &= \frac{1}{2} A_n \exp(j\varphi_n) = \frac{1}{2} (A_n \cos(\varphi_n) + j A_n \sin(\varphi_n)) = \frac{1}{2} (c_n - j s_n) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_T x(t) \cos(n\Omega t) dt - j \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin(n\Omega t) dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_T x(t) (\cos(n\Omega t) - j \sin(n\Omega t)) dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) \exp(-jn\Omega t) dt. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Pentru $n < 0$ avem în mod similar:

$$\begin{aligned} A_{nc} &= \frac{1}{2} A_{-n} \exp(-j\varphi_{-n}) = \frac{1}{2} (A_{-n} \cos(\varphi_{-n}) - j A_{-n} \sin(\varphi_{-n})) = \frac{1}{2} (c_{-n} + j s_{-n}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_T x(t) \cos(-n\Omega t) dt + j \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin(-n\Omega t) dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_T x(t) (\cos(n\Omega t) - j \sin(n\Omega t)) dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) \exp(-jn\Omega t) dt. \end{aligned} \quad (1.18)$$

În dezvoltarea de mai sus, am folosit faptul că funcția cosinus este pară și că sinus este impară. În sfârșit, pentru A_{0c} se poate scrie:

$$A_{0c} = A_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_t x(t) dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) \underbrace{\exp(-j0\Omega t)}_{=1} dt. \quad (1.19)$$

Rezumând, relațiile (1.17), (1.18) și (1.19) pot fi scrise în mod unitar precum:

$$A_{nc} = \frac{1}{T} \int_T x(t) \exp(-jn\Omega t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.20)$$

La sfârșitul expunerii, se impun câteva observații importante:

- Este evident că cele trei forme ale descompunerii în serie Fourier ale unui semnal periodic sunt reprezentări echivalente ale aceleiași realități fizice, care exprimă descompunerea unui semnal periodic într-o sumă numărabilă de (co)sinusoide; din orice dintre cele trei forme se pot deduce celelalte două.
- Forma complexă a descompunerii introduce noțiunea de “frecvență negativă”. Este evident că această noțiune provine dintr-o construcție matematică ce nu are nici o legătură cu realitatea fizică. În realitate, conform cu (1.14) și cu (1.15), componenta pe așa-zisa frecvență negativă $-n\Omega$ împreună cu cea pe frecvența $n\Omega$ formează împreună componenta sinusoidală de frecvență $n\Omega$.

Capitolul 2

Transformata Fourier

2.1 Introducere

În capitolul dedicat descompunerii unui semnal în serie Fourier, am arătat că un semnal periodic poate fi descompus ca o sumă de un număr numărabil de componente sinusoidale, de frecvențe multipli ai frecvenței de bază a semnalului, numită frecvență “fundamentală”. În acest capitol, vom generaliza această descompunere a unui semnal într-o sumă de sinusoidale și pentru semnale neperiodice.

Să începem prin a studia forma spectrului semnalului periodic în funcție de perioada sa T . Se observă că pe măsură ce T crește, componentele din spectrul semnalului se “îndesesc”. Acest lucru este natural, întrucât creșterea lui T este echivalentă cu scăderea frecvenței fundamentale $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, și deci, cu scăderea intervalului de frecvență între două componente succesive. Figura 2.1 ilustrează un exemplu. Evident, la limită, când $T \rightarrow \infty$, componentele frecvențiale se “contopesc”, iar spectrul semnalului devine de natură continuă.

Ajungem, deci, la definiția transformatei Fourier.

Definiție. Fie $x(t)$ un semnal de modul integrabil:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = M < \infty. \quad (2.1)$$

Atunci, se definește transformata Fourier a semnalului $x(t)$ ca fiind semnalul $X(\omega)$ obținut după:

$$X(\omega) \stackrel{\text{not}}{=} \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (2.2)$$

Semnalul original $x(t)$ poate fi recuperat din transformata sa prin aplicarea operatorului invers:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \quad (2.3)$$

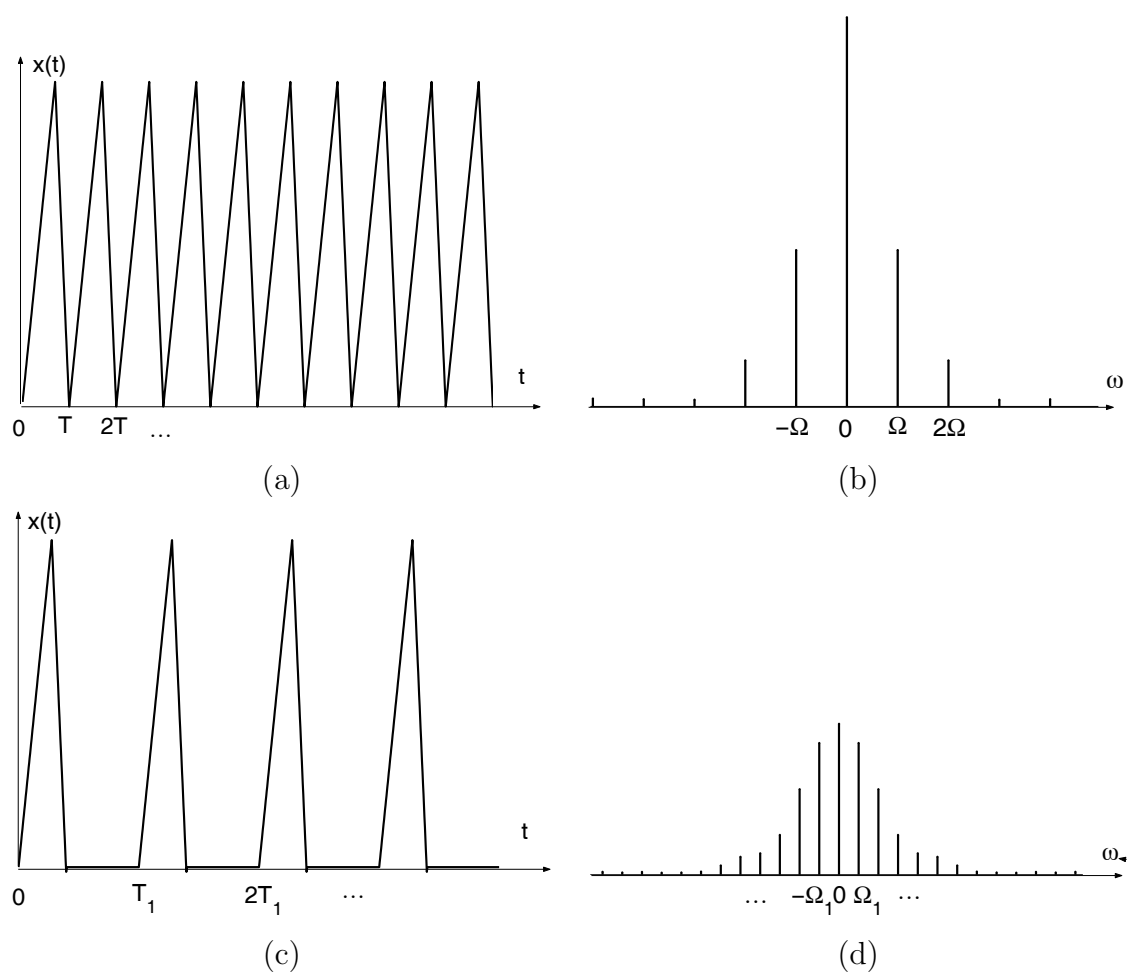


Figura 2.1: Forma spectrului unui semnal periodic în funcție de perioadă: (a) Semnal periodic de perioada T . (b) Modulul coeficienților A_{nc} pentru semnalul din figura a. (c) Semnal periodic de perioada $T_1 > T$. (d) Modulul coeficienților A_{nc} pentru semnalul din figura (c).

Este important, pentru înțelegerea noțiunilor, să observăm similitudinile și diferențele între relațiile (2.2) și (2.3) și cele care descriu descompunerea în serie Fourier complexă a unui semnal periodic, respectiv (1.20) și (1.16). Se observă că semnificația valorilor $X(\omega)$ este similară cu cea a coeficienților A_{nc} , cu singura diferență că, în cazul transformatei Fourier, numărul de cosinusoide în care se descompune semnalul devine infinit nenumărabil. În rest, semnificația valorilor $X(\omega)$ este aceeași pe care am discutat-o în capitolul precedent: modulul $|X(\omega)|$ și faza $\varphi(\omega)$ ale cantității complexe $X(\omega) = |X(\omega)| \exp(j\varphi(\omega))$ sunt amplitudinea, respectiv faza cosinusoidei de frecvență ω ce intră în descompunerea spectrală a semnalului $x(t)$. Într-adevăr, observând că, în ipoteza unui semnal $x(t)$ cu valori reale, valorile transformatei Fourier situate simetric față de 0 sunt complex conjugate:

$$x(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t \Leftrightarrow X(-\omega) = X^*(\omega) \Leftrightarrow \begin{cases} |X(-\omega)| = |X(\omega)| \\ \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega) \end{cases}, \quad (2.4)$$

atunci (2.3) poate fi rescrisă ca:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega + \int_0^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \right) \\
&\stackrel{\omega=-\Omega}{=} \frac{1}{2\pi} \left(- \int_{\infty}^0 X(-\Omega) \exp(-j\Omega t) d\Omega + \int_0^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} \underbrace{X^*(\Omega) \exp(-j\Omega t)}_{[X(\Omega) \exp(j\Omega t)]^*} d\Omega + \int_0^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(X(\omega) \exp(j\omega t) + [X(\omega) \exp(j\omega t)]^* \right) d\omega.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

În continuare, folosind faptul că $\forall z \in \mathbb{C}$, avem $z+z^* = 2\Re\{z\}$ și că $\Re\{X(\omega) \exp(j\omega t)\} = \Re\{|X(\omega)| \exp(j(\omega t + \varphi(\omega)))\} = |X(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega))$, (2.5) devine:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega, \tag{2.6}$$

relație ce justifică afirmația despre semnificația modulului și fazei lui $X(\omega)$.

În continuare, vom demonstra câteva proprietăți importante ale transformatei Fourier.

2.2 Proprietățile transformatei Fourier

Liniaritatea. Transformata Fourier este liniară.

Fie $x(t)$ și $y(t)$ două semnale de modul integrabil și fie a și b două constante complexe. Liniaritatea transformatei Fourier se traduce prin faptul că aceasta comută

$$\mathcal{F}\{ax(t) + b(y(t))\}(\omega) = a\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) + b\mathcal{F}\{y(t)\}(\omega). \tag{2.7}$$

Deplasarea în timp. Deplasarea în timp cu o cantitate constantă t_0 a unui semnal corespunde unei deviații induse în faza spectrului:

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\}(\omega) = X(\omega) \exp(-j\omega t_0). \tag{2.8}$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{x(t - t_0)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) \exp(-j\omega t) dt \stackrel{t-t_0=\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp(-j\omega(\tau + t_0)) d\tau \\
&= \exp(-j\omega t_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau}_{X(\omega)}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Deplasarea în spectru. Deplasarea spectrului unui semnal cu o frecvență constantă ω_0 corespunde înmulțirii semnalului în timp cu o sinusoidă complexă:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega - \omega_0)\}(t) = x(t) \exp(j\omega_0 t). \quad (2.10)$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega - \omega_0)\}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \omega_0) \exp(j\omega t) d\omega \stackrel{\omega - \omega_0 = \Omega}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) \exp(j(\Omega + \omega_0)t) d\Omega \\ &= \exp(j\omega_0 t) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) \exp(j\Omega t) d\Omega}_{x(t)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Schimbarea de scală. O contracție a semnalului cu o constantă a corespunde unei relaxări a spectrului cu aceeași constantă și vice-versa.

$$\mathcal{F}\{x(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (2.12)$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(at)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at) \exp(-j\omega t) dt \stackrel{at = \tau}{=} \int_{-S\infty}^{S\infty} x(\tau) \exp\left(-j\omega \frac{\tau}{a}\right) \frac{1}{a} d\tau \\ &= \frac{1}{Sa} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp\left(-j\frac{\omega}{a}\tau\right) d\tau}_{X\left(\frac{\omega}{a}\right)} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\text{unde } S = \text{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a > 0 \\ -1 & \text{dacă } a < 0 \end{cases}.$$

Derivarea în timp.

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}(\omega) = j\omega X(\omega). \quad (2.14)$$

Demonstrație:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \quad (2.15)$$

Integrarea în timp.

$$\mathcal{F}\left\{\int x(t)dt\right\}(\omega) = \frac{1}{j\omega}X(\omega). \quad (2.16)$$

Demonstrație: Se aplică relația precedentă

Conservarea energiei. Transformata Fourier conservă energia semnalului.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.17)$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega\right)}_{x(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(j\omega t) dt\right)}_{X^*(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Simetria.

$$\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = X(\omega) \Leftrightarrow \mathcal{F}\{X(t)\}(\omega) = 2\pi x(-\omega). \quad (2.19)$$

Demonstrație: Se folosește simetria între relațiile care dau transformata Fourier directă și inversă.

Convoluția în timp. Spectrul semnalului obținut prin convoluția temporală a două semnale se obține ca produsul spectrelor celor două semnale.

Fie $x(t)$ și $y(t)$ două semnale de modul integrabil, și fie $z(t)$ produsul lor de convoluție:

$$z(t) = x(t) \star y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau. \quad (2.20)$$

Atunci, între transformatele Fourier ale celor trei semnale are loc relația:

$$Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned}
Z(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right) \exp(-j\omega t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) \exp(-j\omega t) \underbrace{\exp(-j\omega\tau) \exp(j\omega\tau)}_{=1} dt d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp(-j\omega\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) \exp(-j\omega(t - \tau)) dt \right) d\tau. \\
&\stackrel{t-\tau=\theta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp(-j\omega\tau) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} y(\theta) \exp(-j\omega\theta) d\theta \right)}_{Y(\omega)} d\tau. \\
&= Y(\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau}_{X(\omega)} = X(\omega)Y(\omega).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Convoluția în frecvență. Spectrul semnalului obținut prin produsul a două semnale se obține prin convoluția spectrelor celor două semnale.

Fie $x(t)$ și $y(t)$ două semnale de modul integrabil, și fie $z(t)$ semnalul obținut prin produsul lor:

$$z(t) = x(t)y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

Atunci, între transformatele Fourier ale celor trei semnale are loc relația:

$$Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \star Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) Y(\omega - \Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \Omega) Y(\Omega) d\Omega. \tag{2.24}$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) y(\omega - \Omega) d\Omega \right) \exp(j\omega t) d\omega \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) Y(\omega - \Omega) \underbrace{\exp(j\omega t) \exp(-j\Omega t) \exp(j\Omega t)}_{=1} d\omega d\Omega \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) \exp(j\Omega t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega - \Omega) \exp(j(\omega - \Omega)t) d\omega \right) d\Omega. \\
 &\stackrel{\omega - \Omega = \Psi}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) \exp(j\Omega t) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\Psi) \exp(j\Psi t) d\Psi \right)}_{y(t)} d\Omega. \\
 &= y(t) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) \exp(j\Omega t) d\Omega}_{x(t)} = x(t)y(t).
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

2.3 Transformatele Fourier ale câtorva semnale de interes

Impulsul Dirac

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt = 1. \tag{2.26}$$

În relația de mai sus s-a folosit proprietatea impulsului Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \tag{2.27}$$

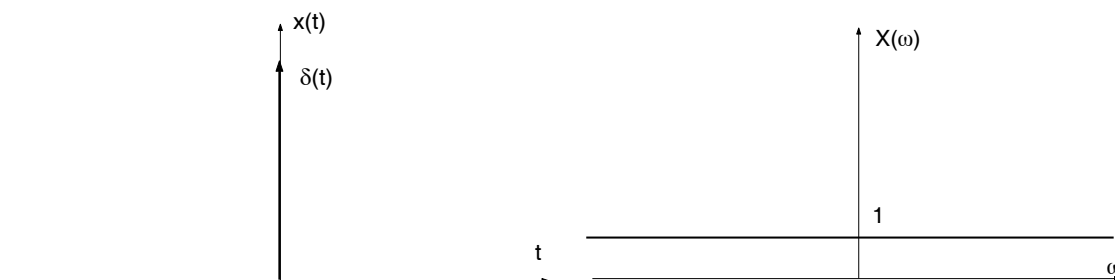


Figura 2.2: Impulsul Dirac și transformata sa Fourier

Semnalul constant Calculul transformatei Fourier a semnalului constant $x(t) = 1$ nu poate fi făcut direct, datorită imposibilității calculului limitei $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-j\omega t)$. Pentru rezolvarea problemei, se folosește rezultatul anterior (conform căruia transformata Fourier a unui impuls Dirac este funcția constantă) și se aplică proprietatea simetriei transformatei Fourier, care afirmă că, cu excepția unor constante și a unei operații de simetrizare, două funcții fac pereche Fourier indiferent care din ele e exprimată în timp și care în frecvență. Rezultatul anterior poate fi scris compact ca:

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1(\omega) \quad (2.28)$$

de unde, aplicând (2.19), avem:

$$1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega). \quad (2.29)$$

Într-adevăr, calculând transformata Fourier inversă a semnalului $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$, avem

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = 1 = x(t), \quad (2.30)$$

ceea ce completează demonstrația noastră.

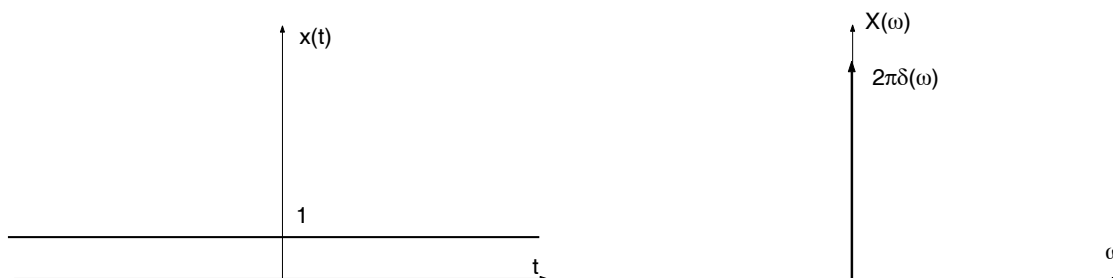


Figura 2.3: Semnalul constant și transformata sa Fourier

Observație. Având în vedere semnificația transformatei Fourier a unui semnal, era normal să ne așteptăm la acest rezultat, care se interpretează în sensul că în descompunerea unui semnal constant ca o sumă de sinusoidă intră *numai* componenta de frecvență zero, adică semnalul constant!

Funcția cosinus. La fel ca și în cazul semnalului constant, calculul transformatei Fourier a funcției $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ nu poate fi abordat în mod direct, ci tot folosind rezultate deja determinate și proprietăți ale transformatei Fourier.

Pornind de la identitatea (1.13) și folosind rezultatul anterior și teorema deplasării în frecvență, avem succesiv:

$$\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega) \\ \exp(-j\omega_0 t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \\ \exp(j\omega_0 t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \\ \cos(\omega_0 t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)). \end{aligned} \quad (2.31)$$

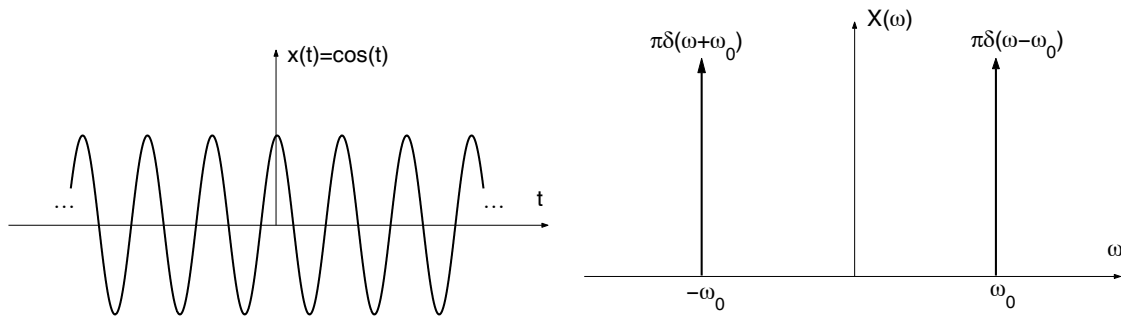


Figura 2.4: Semnalul cosinusoidal pur și transformata sa Fourier

Transformata Fourier a semnalului $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ se poate deduce în mod absolut similar pornind de la:

$$\sin(x) = \frac{\exp(jx) - \exp(-jx)}{2j} \quad (2.32)$$

Observație. La fel ca în cazul transformatei Fourier a semnalului constant, rezultatul obținut mai sus este intuitiv, întrucât arată faptul că descompunerea unui semnal cosinusoidal pur de frecvență ω_0 ca o sumă de cosinusoide este compusă dintr-o *singură* cosinusoidă, și anume cea pe frecvența respectivă!

Semnalul de tip “box” . Fie semnalul:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } |t| \leq T \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} . \quad (2.33)$$

Transformata Fourier a lui $x(t)$ se calculează direct precum:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-T}^T \exp(-j\omega t) dt = -\frac{1}{j\omega} \exp(-j\omega t) \Big|_{-T}^T = \frac{\exp(j\omega T) - \exp(-j\omega T)}{j\omega} \\ &= \frac{2j \sin(\omega T)}{j\omega} = 2T \operatorname{sinc}(\omega T). \end{aligned} \quad (2.34)$$

unde cu $\operatorname{sinc}(x)$ am notat funcția sinus cardinal:

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}. \quad (2.35)$$

Semnalul sinus cardinal. Aplicând rezultatului anterior teorema simetriei și folosind faptul că funcția “box” e pară, rezultă că transformata Fourier a unei funcții de tip sinc este o funcție box:

$$\operatorname{sinc}(\omega_0 x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_0} & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} . \quad (2.36)$$

Rezultatul de mai sus este extrem de util în studiul filtrelor liniare.

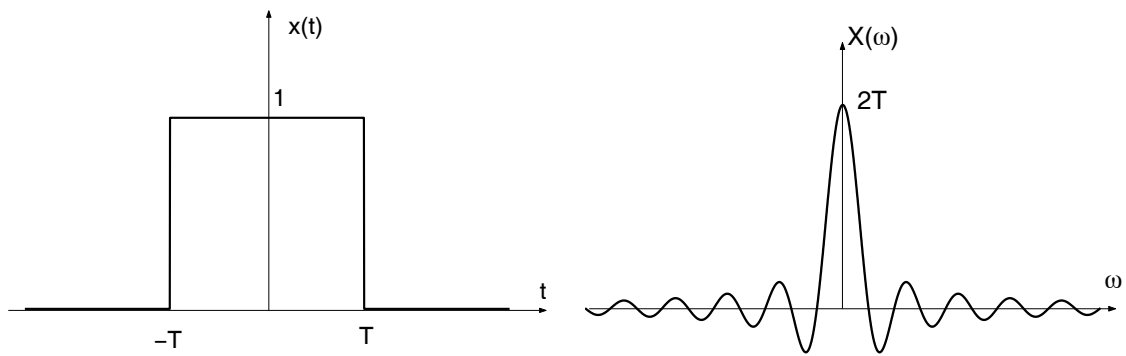


Figura 2.5: Semnalul de tip “box” și transformata sa Fourier

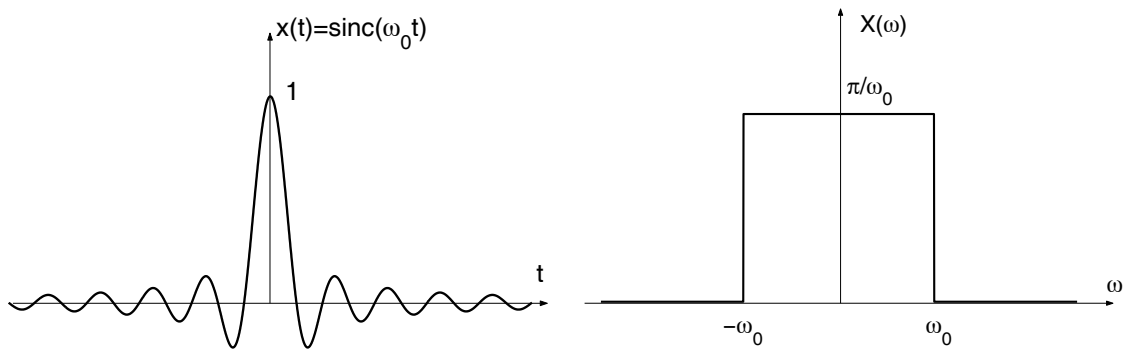


Figura 2.6: Semnalul de tip sinus cardinal și transformata sa Fourier

Capitolul 3

Teorema eșantionării

Fie $x(t)$ un semnal de modul integrabil, al cărui spectru este mărginit. Dacă $X(\omega)$ este spectrul semnalului, dat de transformata Fourier a acestuia:

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt, \quad (3.1)$$

atunci mărginirea spectrului semnalului poate fi scrisă precum:

$$|X(\omega)| = 0, \quad \forall \omega > \Omega_{\max}, \quad (3.2)$$

cu Ω_{\max} frecvența maximă a acestuia. În figura 3.1 este prezentat un exemplu de semnal cu spectru limitat.

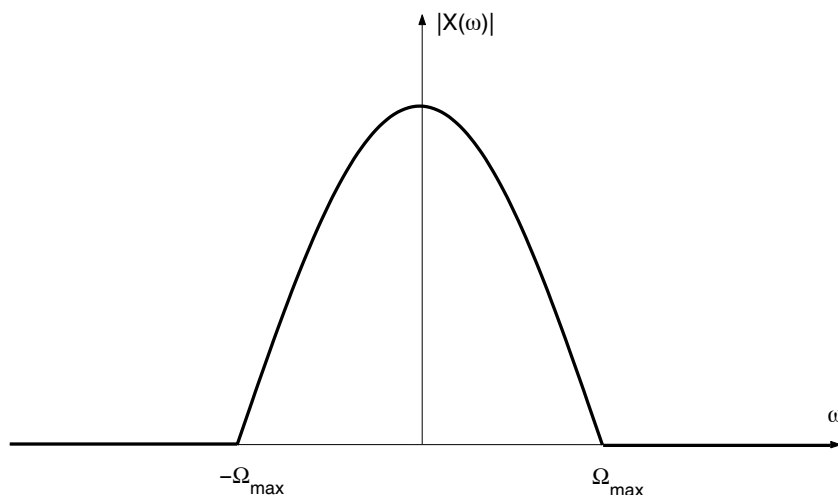


Figura 3.1: Exemplu de semnal cu spectru limitat

Având în vedere (3.2), rezultă că semnalul original $x(t)$ poate fi recuperat din spectrul său $X(\omega)$ după:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \quad (3.3)$$

În continuare, vom face următoarea construcție: dezvoltăm spectrul $X(\omega)$ al semnalului nostru într-o *serie Fourier în interiorul intervalului* $[-\Omega_{\max}, \Omega_{\max}]$! În legătură cu această construcție, se impun următoarele precizări importante pentru înțelegerea ei:

- Dezvoltarea în serie Fourier a fost prezentată și discutată în contextul unor semnale *de timp*. Acest lucru nu ne împiedică, însă, aplicarea aceleiași teorii pentru un semnal reprezentat în frecvență, întrucât este vorba despre o construcție matematică valabilă indiferent de semnificația fizică pe care o atribuim mărimilor cu care operează. În acest context, să observăm că, dacă semnificația fizică a coeficienților dezvoltării în serie Fourier a unui semnal temporal este de componente frecvențiale, atunci, invers, semnificația fizică a coeficienților dezvoltării unui semnal de frecvență va fi de componente *temporale*.
- Dezvoltarea în serie Fourier a unui semnal a fost discutată numai pentru semnale *periodice*. Or, să ne reamintim că semnalul pe care intenționăm să îl dezvoltăm nu este periodic! Din acest motiv, descompunerea semnalului nu este valabilă *decât* în interiorul intervalului considerat, respectiv $[-\Omega_{\max}, \Omega_{\max}]$.

Astfel, introducând perioada semnalului (în cazul de față $2\Omega_{\max}$) în (1.2), relația (1.16) care ne dă dezvoltarea în serie Fourier complexă se scrie:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{2\Omega_{\max}} \omega\right) \quad \forall \omega \in [-\Omega_{\max}, \Omega_{\max}]. \quad (3.4)$$

unde ξ_n sunt coeficienții dezvoltării, ce, conform cu (1.20), pot fi deduși ca:

$$\xi_n = \frac{1}{2\Omega_{\max}} \int_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} X(\omega) \exp\left(-jn \frac{2\pi}{2\Omega_{\max}} \omega\right) d\omega. \quad (3.5)$$

Prin identificarea termenilor din relațiile (3.5) și (3.3), rezultă că ξ_n nu sunt alceva decât valori ale semnalului original $x(t)$ la anumite momente de timp:

$$\xi_n = \frac{\pi}{\Omega_{\max}} x\left(-n \frac{\pi}{\Omega_{\max}}\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

În continuare, înlocuim pe $X(\omega)$ dat de (3.5) în relația (3.3), obținând:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{2\Omega_{\max}} \omega\right) \right) \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \int_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} \exp\left(j \underbrace{\left(t + n \frac{\pi}{\Omega_{\max}}\right)}_{\substack{\text{not} \\ \equiv \alpha}} \omega\right) d\omega. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Prin calcul direct, integrala de mai sus poate fi scrisă precum:

$$\begin{aligned} \int_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} \exp(j\alpha\omega) d\omega &= \frac{1}{j\alpha} \exp(j\alpha\omega) \Big|_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} = \frac{\exp(j\alpha\Omega_{\max}) - \exp(-j\alpha\Omega_{\max})}{j\alpha} \\ &= \frac{2j \sin(\alpha\Omega_{\max})}{j\alpha} = 2\Omega_{\max} \operatorname{sinc}(\alpha\Omega_{\max}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

În dezvoltarea de mai sus, am folosit identitatea (2.32), funcția $\operatorname{sinc}(x)$ fiind dată de (2.35).

Înlocuind (3.8) în (3.7), obținem:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} 2\Omega_{\max} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \operatorname{sinc}\left(\Omega_{\max}\left(t + n\frac{\pi}{\Omega_{\max}}\right)\right). \quad (3.9)$$

Ultimul pas este înlocuirea în relația de mai sus a valorilor ξ_n date de (3.6):

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \Omega_{\max} \frac{\pi}{\Omega_{\max}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(-n\frac{\pi}{\Omega_{\max}}\right) \operatorname{sinc}\left(\Omega_{\max}\left(t + n\frac{\pi}{\Omega_{\max}}\right)\right), \quad (3.10)$$

de unde, reducând termeni, introducând notația

$$T_e \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\pi}{\Omega_{\max}}, \quad (3.11)$$

și schimbând variabila după care se face sumarea $k = -n$ obținem relația finală ce reprezintă teorema eșantionării:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \operatorname{sinc}(\Omega_{\max}(t - kT_e)), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Interpretarea relației (3.12), respectiv enunțul teoremei eșantionării, este următoarea:

Teoremă: *Un semnal de spectru mărginit poate fi complet reconstruit din eșantioanele sale, cu condiția ca frecvența de eșantionare să fie cel puțin dublul frecvenței maxime a semnalului.*

Într-adevăr, relația (3.12) ne arată că, având disponibile numai valorile semnalului $x(t)$ într-o mulțime discretă de puncte, respectiv la valori de timp distanțate cu cantitatea T_e una față de alta, putem calcula valoarea semnalului la *orice* moment de timp $t \in \mathbb{R}$.

Or, notând cu Ω_e frecvența corespunzătoare valorii T_e definite în (3.11), avem:

$$\Omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{\Omega_{\max}}} = 2\Omega_{\max}, \quad (3.13)$$

ceea ce justifică afirmația din enunțul teoremei conform căreia frecvența de eșantionare trebuie să fie cel puțin dublul frecvenței maxime a semnalului¹.

¹Relația (3.12) prezintă recompunerea semnalului din eșantioanele lui luate cu *exact* dublul frecvenței sale maxime Ω_{\max} . Este evident, însă, că întreg calculul prezentat aici poate fi reluat și pentru o valoare superioară frecvenței maxime a semnalului $\Omega_{\max}' > \Omega_{\max}$, de unde rezultă că semnalul poate fi reconstruit în mod similar și dacă frecvența de eșantionare este *mai mare* decât dublul frecvenței sale maxime.

Reconstrucția semnalului din eșantioanele sale se face printr-o sumă de funcții de tip “sinus cardinal”, ponderate cu valorile eșantionate ale semnalului. Cu alte cuvinte, relația (3.12) ne dă descompunerea semnalului original $x(t)$ în baza ortonormală de funcții $\{f_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ cu

$$f_k(t) \stackrel{\text{not}}{=} \text{sinc}(\Omega_{\max}(t - kT_e)). \quad (3.14)$$

În sfârșit, o observație extrem de utilă pentru o înțelegere mai bună a problemei. După cum am precizat și înainte, datorită faptului că funcția $X(\omega)$ nu este periodică, descompunerea acesteia în serie Fourier nu este valabilă decât în interiorul intervalului considerat pentru funcția respectivă, și anume $[-\Omega_{\max}, \Omega_{\max}]$. Pentru ca descompunerea (3.4) să fie valabilă pentru $\forall \omega \in \mathbb{R}$, ar trebui considerat semnalul obținut prin periodizarea lui $X(\omega)$ cu perioadă $2\Omega_{\max}$. Cu alte cuvinte, dacă luăm în considerare semnalul $\tilde{X}(\omega)$ obținut ca:

$$\tilde{X}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(\omega - 2k\Omega_{\max}), \quad (3.15)$$

atunci relația (3.4) devine:

$$\tilde{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{2\Omega_{\max}} \omega\right) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (3.16)$$

cu ξ_n dați de (3.5). Reamintindu-ne că valorile ξ_n nu sunt altceva decât eșantioanele semnalului continuu, interpretarea relațiilor (3.16) și (3.5) este următoarea: *spectrul semnalului eșantionat cu frecvența Ω_e se obține prin periodizarea spectrului semnalului continuu cu perioada Ω_e !* Figura 3.2 ilustrează acest aspect important, care ne oferă o altă interpretare intuitivă a aceleiași teoreme a eșantionării: dacă semnalul este eșantionat cu o frecvență de eșantionare mai mică decât dublul frecvenței maxime ($\Omega_e < 2\Omega_{\max}$) atunci în spectrul semnalului apare un fenomen (numit *aliasing*) caracterizat de întrepătrunderea “bucăților” de spectru deplasate cu multipli de Ω_e (de exemplu, întrucât $\Omega_{\max} > \Omega_e - \Omega_{\max}$, partea superioară a spectrului nedeplasat se va suprapune cu partea inferioară a spectrului deplasat la dreapta cu Ω_e etc.) de unde rezultă că semnalul original nu mai poate fi recuperat din eșantioanele sale!

Totodată, această periodizare a spectrului semnalului prin eșantionare ne conduce și la o modalitate practică de a recupera originalul, adică semnalul continuu, din versiunea sa eșantionată: prin aplicare unui filtru trece-jos de frecvență de tăiere $\Omega_t \in [\Omega_{\max}, \Omega_e - \Omega_{\max}]$.

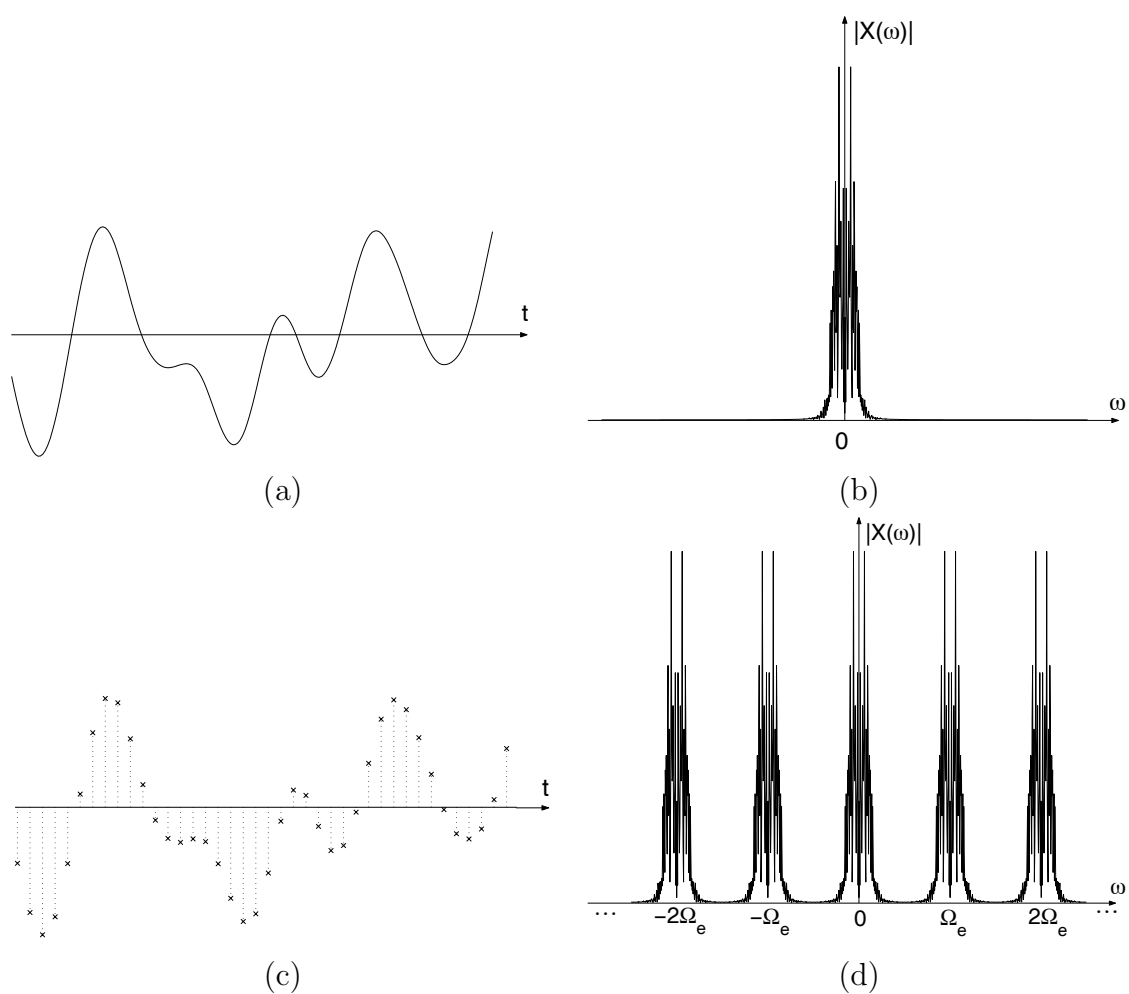


Figura 3.2: Legătura între spectrele semnalului continuu și al celui eșantionat: (a) Semnal continuu. (b) Spectrul semnalului continuu. (c) Semnalul eșantionat cu frecvența Ω_e . (d) Spectrul semnalului eșantionat, obținut prin periodizarea spectrului semnalului continuu.