TRAITEMENT D'IMAGE

MODELES FONCTIONNELS

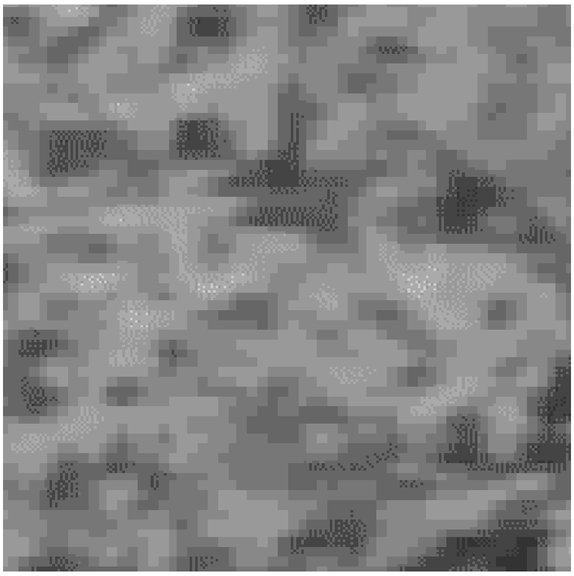
CHAMPS ALÉATOIRES

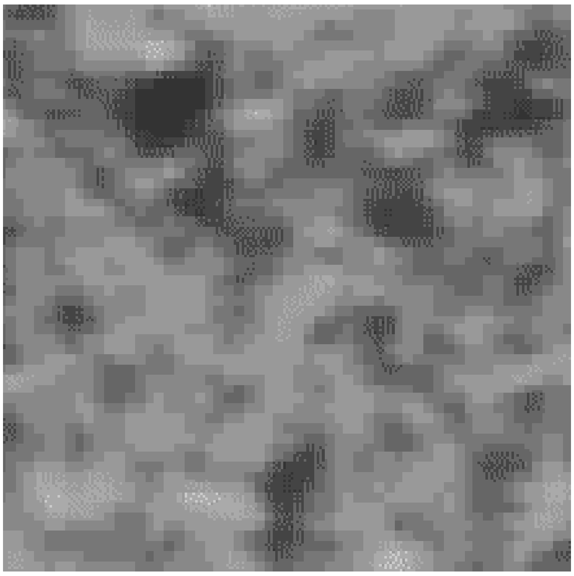
PH.BOLON

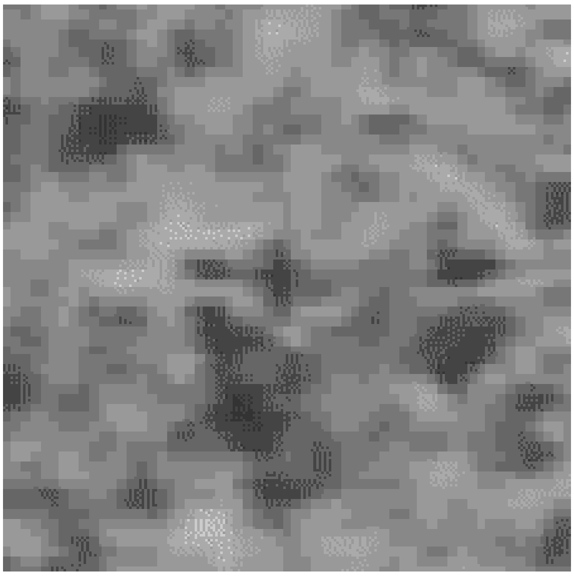
LISTIC

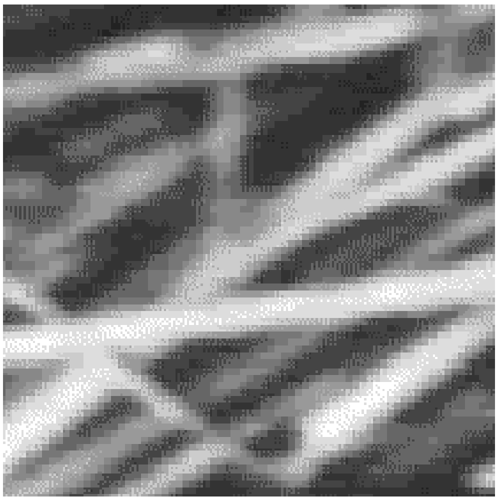
POLYTECH ANNECY-CHAMBÉRY

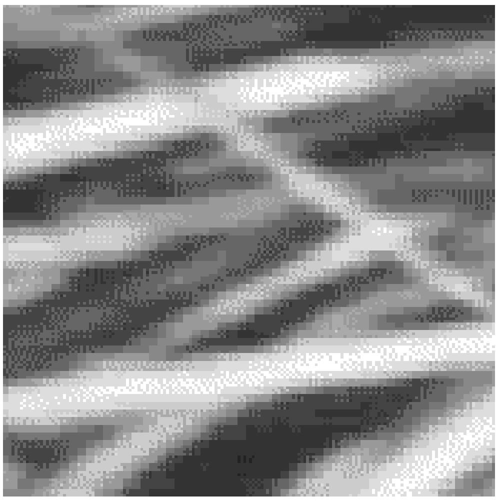
UNIVERSITÉ DE SAVOIE











1. CHAMPS ALÉATOIRES

1.1. introduction

variabilité locale des images naturelles,
textures,
bruits de capteurs

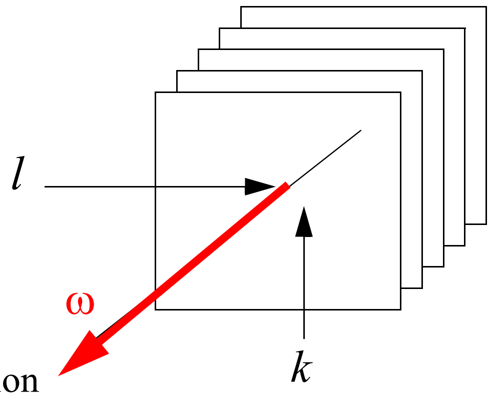
1.2. représentation

1.2.1. modèle mathématique

X   **R** x **R** x Ω ------>   **R**
     $(l,\ k,\ \omega)$ $X(l,k,\omega)$

❑ extension en 2D des fonctions aléatoires

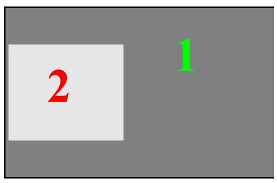
ω=constante   image déterministe x(l,k)
(l,k) = constante   variable aléatoire X

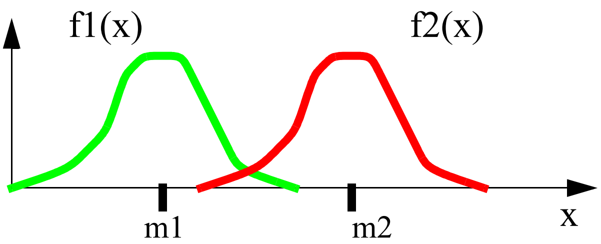


collection de réalisations particulières
variable aléatoire dépendant de position

1.3. étude statistique

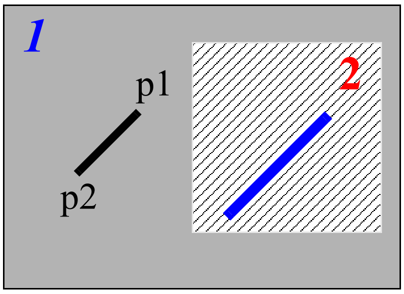
<u>au premier ordre</u> : étude de la variable $X(l,k)$
densité de probabilité : $f(x,l,k)$
fonction de répartition : $F(x,l,k)$
étude simplifiée : $E[X(l,k)]$





<u>au deuxième ordre</u> : étude des couples aléatoire $X(l_1,k_1)$, $X(l_2,k_2)$.

densité de probabilité conjointe : $f(a, l_1,k_1, b, l_2,k_2)$
moment d'ordre 2 : $E[X(l_1, k_1)X(l_2, k_2)]$



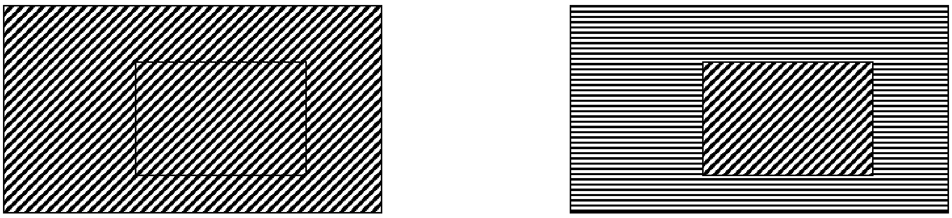
fonction de corrélation

- ❑ champs aléatoires gaussiens

1.4. champs aléatoires stationnaires

def. La loi de probabilité est invariante par translation spatiale

au premier ordre : $f(a,l,k) = f(a)$ ---------------> $E[X(l, k)] = \text{constante}$



au deuxième ordre : $f(\mathbf{a}, l_1,k_1, \mathbf{b}, l_2,k_2) = f(\mathbf{a}, l_1+dl, k_1+dk, \mathbf{b}, l_2+dl, k_2+dk)$
ne dépend que de la translation entre les 2 points
$dl = - l_2$, $dk = -k_2$
$f(\mathbf{a}, l_1-l_2, k_1-k_2, \mathbf{b}, 0, 0)$

fonction de corrélation $C(\Delta l, \Delta k)$

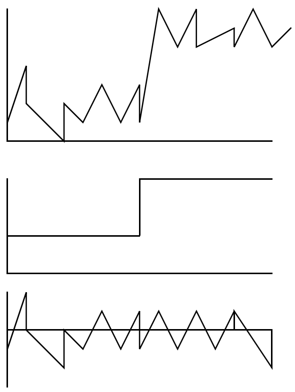
$$C(\Delta l, \Delta k) = E[X(l, k)X(l-\Delta l, k-\Delta k)]$$

$$E[X(l, k)X(l-\Delta l, k-\Delta k)] = \int_{R\times R}\int abf(a, l, k, b, l-\Delta l, k-\Delta k)dadb$$

1.5. modèle pour champs non stationnaires

X = s + B

s : image déterministe
B : champ aléatoire
 stationnaire (au moins localement)
 centré
 éventuellement blanc
 pas forcément gaussien

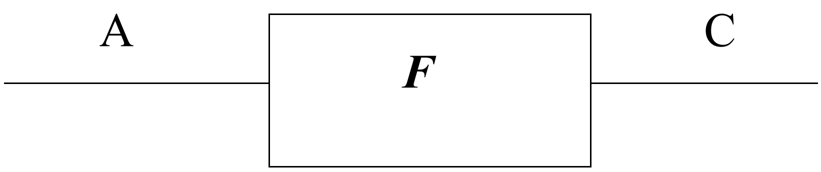


X
s
B

2. FILTRAGE LINÉAIRE DES CHAMPS ALÉATOIRES

2.1. cas continu

modèle : A = s + B
s : déterministe , B : aléatoire, centré,



$$C = F(A) = F(s) + F(B)$$
$$= d + N$$

h : réponse impulsionnelle (PSF)

d = h * s

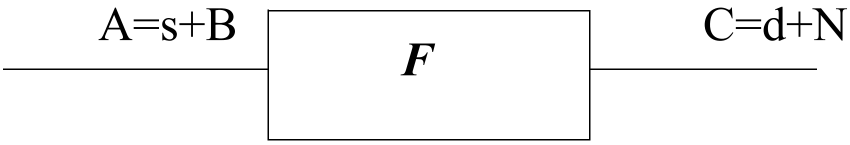
$$d(x, y) = \iint h(\alpha, \beta)s(x - \alpha, y - \beta)d\alpha d\beta$$

par transformation de Fourier

$$\tilde{d}(u, v) = \tilde{h}(u, v)\tilde{s}(u, v)$$

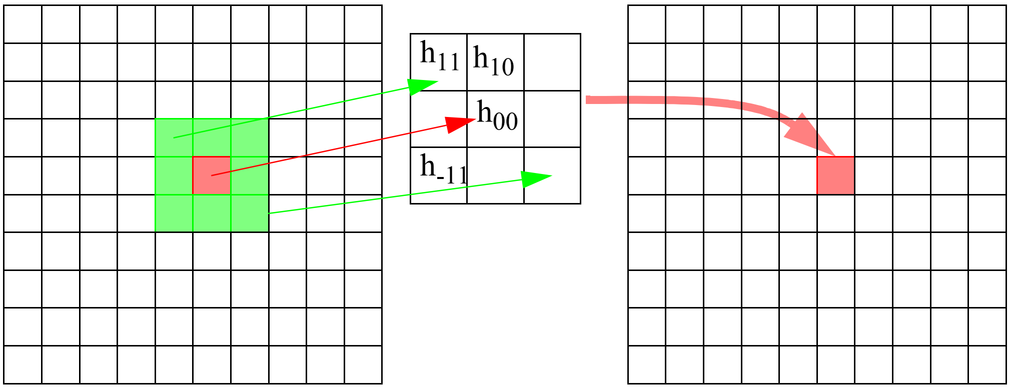
effet passe-bas, passe-haut, passe-bande, etc.

2.2. cas discret



$$d(l,k) = \sum_{i}\sum_{j} h(i,j)\,s(l-i, k-j)$$

$$N(l,k) = \sum_{i}\sum_{j} h(i,j)\,B(l-i, k-j)$$



caractérisation :

effet sur les transitions : flou, rehaussement

effet de réduction de bruit : biais, variance

$$\sum_{i}\sum_{j} h^2(i,j)$$

3. CHAMPS MARKOVIENS

modèle local décrivant les formes et la distribution des amplitudes

3.1. définitions et notations

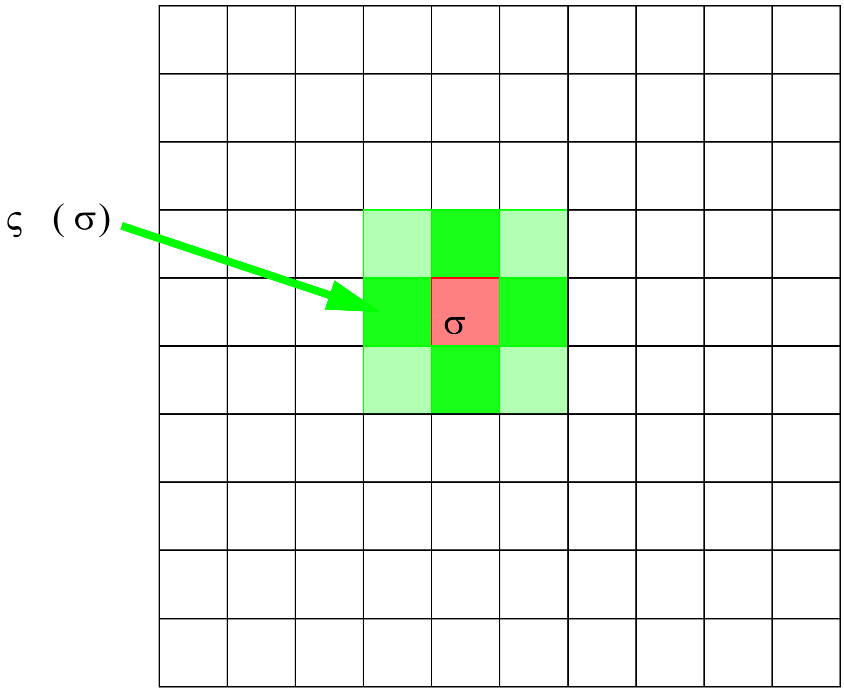
site s pixel

support spatial $S = \{s\}$

système de voisinage

V(s) $t \in V(s) \Leftrightarrow s \in V(t)$

$s \notin V(s)$



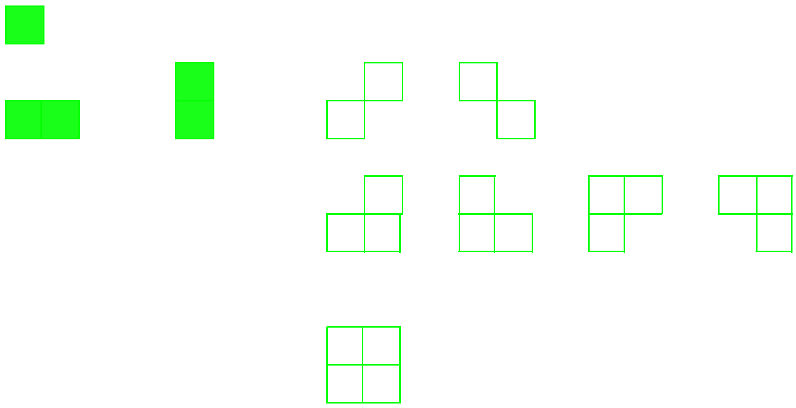
clique : ensemble de sites mutuellement voisins

ordre 1

ordre 2

ordre 3

ordre 4



3.2. propriété markovienne

X : champ aléatoire défini sur S
x : réalisation particulière de X

X est un champ de Markov ssi

$$P(x) > 0$$

$$P(x_s | x_t, t \neq s) = P(x_s | x_t, t \in V(s))$$

3.3. Théorème de Hammersley-Clifford

X est un champ de Markov ssi X suit une distribution de Gibbs.

$$P(x) = \frac{1}{Z(T)} \exp\left(-\frac{U(x)}{T}\right)$$ T : paramètre de Température

$$Z(T) = \sum_{x} \exp\left(-\frac{U(x)}{T}\right)$$ constante de normalisation

(difficile à calculer)

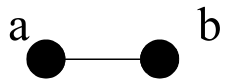
$$U(x) = \sum_{c \in C} V_c(t1, t2, ...) \text{ avec } (t1, t2, ...) \in c$$

$V_c(t1, t2, ...)$: potentiel de la clique c conséquence

$$P(x_s = v | x_t,\ t \in V(s)) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{T}\sum_{c \ni s} V_c(x_s = v, x_t\ldots)\right)}{\sum_{w} \exp\left(-\frac{1}{T}\sum_{c \ni s} V_c(x_s = w, x_t\ldots)\right)}$$

peu de termes à calculer

exemple : $V(x_a, x_b) = (x_a - x_b)^2$ favorise les intensités proches



3.4. synthèse d'un champ de Markov

choisir :
- système de voisinage
- ordre des cliques
- fonctions potentiels
- paramètre de 'température'

échantillonneur de Gibbs

étape 0 : tirer une configuration x^0 au hasard

....

étape n : ...

étape n+1 :

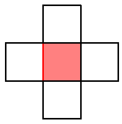
balayer tous les pixels

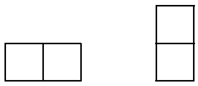
calculer $P(x_s = v | x^n_t,\ t \in V(s))$

tirer au hasard la valeur x_s^{n+1} selon la loi ci-dessus

arret
- au bout d'un nombre déterminé d'itérations
- énergie $U(x)$ n'évolue plus

exemple : Modèle d'Ising
champ aléatoire binaire

4-voisinage 

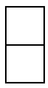
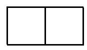
cliques d'ordre 2 

potentiels $V_c(x_s,x_t) = -b$ si $x_s = x_t$

$V_c(x_s,x_t) = +b$ sinon

exemples

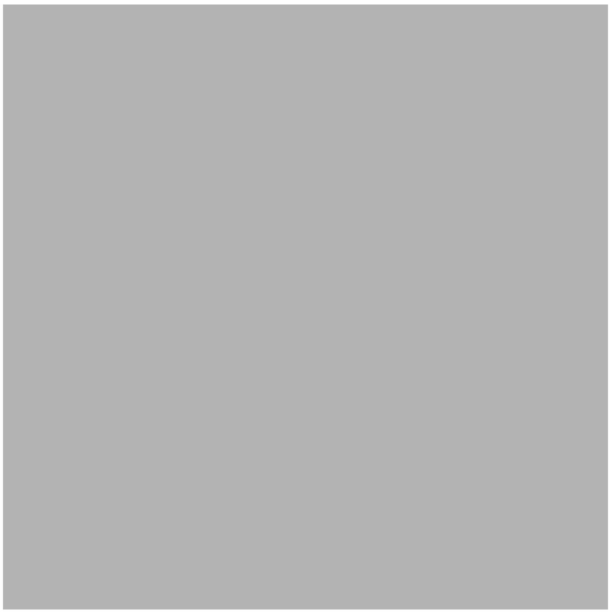
On peut introduire des contraintes de formes à l'aide des fonctions potentiels

cliques d'ordre 2  

potentiels	$V_c(x_s,x_t) = -b1$	si $x_s = x_t$	$V_c(x_s,x_t) = -b2$
	$V_c(x_s,x_t) = +b1$	sinon	$V_c(x_s,x_t) = +b2$

exemple

initialisation



décroissance de l'énergie

T=2

image finale (35 itérations)

b1=5
b2=-0.1

3.5. application en segmentation ou restauration d'image

segmentation

Y : champ des étiquettes de région (classe), modèle markovien

X : champ des observations

problème : trouver Y sachant X

méthode MAP : chercher la configuration y maximisant P(Y=y|X=x)

$$Y = y$$

$$P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x|Y = y)P(Y = y)}{P(X = x)}$$

pour une réalisation x donnée, P(x)=constante
-> maximiser le numérateur

Y : champ markovien -> énergie U1(y)
X|Y : champ markovien -> énergie U2(x|y)

il faut maximiser

$$P(X = x|Y = y)P(Y = y) = \frac{\exp\left(-\frac{U2(x|y)}{T}\right)}{K2} \frac{\exp\left(-\frac{U1(y)}{T}\right)}{K1}$$

solution : minimiser l'énergie globale U(y)=U1(y)+U2(x|y), x connu.

méthode :

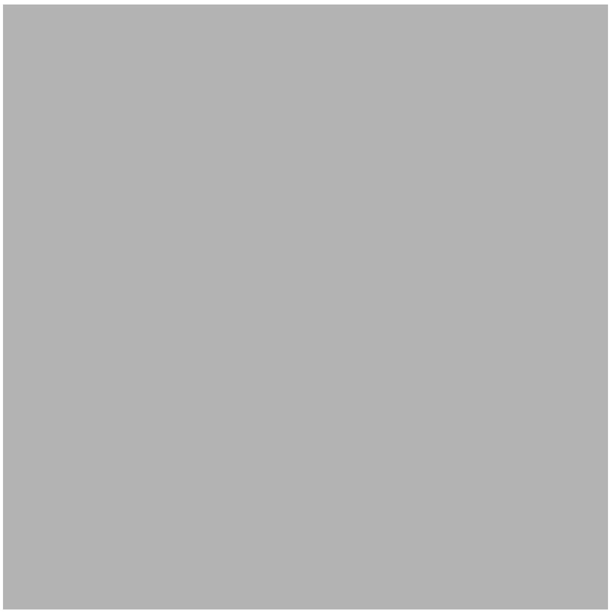
initialiser une configuration y
synthétiser un champ de Markov par échantillonneur de Gibbs
commencer avec T élevée, puis faire décroitre T

- ☐ méthode du recuit simulé
- ☐ optimisation stochastique

exemple :

- T initiale = 40
- loi de décroissance : $T^{n+1}=0.98*T^{n}$ jusqu'à T=1
- 60 itérations

initialisation



décroissance de l'énergie

configuration calculée

☐ possibilité de sortir d'un minimum local si T élevée

restauration

Y : autant d'étiquettes de classe que de niveaux de gris, modèle markovien

X : champ des observations

problème : trouver Y sachant X

méthode MAP : chercher la configuration y maximisant P(Y=y|X=x)

même situation que précédemment mais avec plus d'étiquettes

3.6. cas limites

☐ T infinie : toutes les configurations sont équiprobables

$$P(x_s = v | x_t, t \in V(s)) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{T}\sum_{c \ni s} V_c(x_s = v, x_t \ldots)\right)}{\sum_{w} \exp\left(-\frac{1}{T}\sum_{c \ni s} V_c(x_s = w, x_t \ldots)\right)}$$

☐ T = 0 : sélection de la (ou d'une) configuration d'énergie minimale

$$a = \operatorname{argmin}\left(\sum_{c \ni s} V_c(x_s = v, x_t \ldots)\right)$$

$$P(x_s = a | x_t, t \in V(s)) = 1$$

☐ **quelques cas particuliers**

énergie U1 : régularisation spatiale

potentiel d'une clique $V(y_s, y_t) = (y_s - y_t)^2$

énergie U2 : attache aux données

modèle de type bruit blanc $V(x_s | y_s) = (y_s - x_s)^2$

solution : filtre moyenneur

solution itérée : filtrage linéaire gaussien

potentiels en $V(a, b) = |a - b|$

solution : filtre médian

solution itérée : processus complexe => plateaux + transitions monotones

potentiels en $V(a, b) = |a - b|^{\infty}$

solution : filtre milieu